Πρόχειρες σημειώσεις διαλέξεων

10η Εβδομάδα

§ **3. Συστήματα Με Σταθερούς Συντελεστές**

Το Θεώρημα 2.1 και η μέθοδος των μεταβαλλώμενων σταθερών ανάγει τον προσδιορισμό της γενικής λύσης του συστήματος (2.1) στον προσδιορισμό του θεμελιωδούς συστήματος (θ.σ.) λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος (1.1). Δεν υπάρχει αλγόριθμος για την κατασκευή του θ.σ. στην γενική περίπτωση, όμως στην περίπτωση που το σύστημα έχει σταθερούς συντελεστες το θ.σ. λύσεων μπορεί εύκολα να κατασκευαστεί. Για να απλοποιήσουμε τα πράγματα θα ασχοληθούμε κυρίως με συστήματα δυο εξισώσεων (αντί για $x_1(t), x_2(t)$ θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $x(t), y(t)$).

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y$$

(3.1)

$$\frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y.$$

ή

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Πρέπει να βρούμε δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος (άρα ψάχνουμε μη μηδενικές λύσεις). Ψάχνουμε τη λύση $(x,\ y)$ σε μορφή

$$x(t) = \alpha e^{kt}, \ \ y(t) = \beta e^{kt} \tag{3.2}$$

όπου α, β κάποιες σταθερές. Αντικαθιστώντας τις συναρτήσεις (3.2) στο σύστημα (3.1) παίρνουμε

$$\begin{aligned} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta = 0 \end{aligned}$$

ή

$$\begin{pmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Για να υπάρχει μη τετριμμένη λύση α, β του αλγεβρικού συστήματος (3.3) πρέπει η ορίζουσα του συστήματος να ισούται με μηδέν

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0,$$

δηλαδή

$$k^2 - (a_{11} + a_{22})k + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \tag{3.4}$$

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις: α) δυο διαφορετικές (αναγκαστικά) πραγματικές ρίζες, β) (μια) μιγαδική ρίζα, γ) διπλή (πραγματική) ρίζα.

α) Αν οι ρίζες του k_1, k_2 χαρακτηριστικού πολυωνύμου (3.4) είναι διαφορετικές τότε οι δυο λύσεις του (3.1) που ψάχνουμε θα έχουν τη μορφή

$$(x_1(t), y_1(t)) = (\alpha_1 e^{k_1 t}, \beta_1 e^{k_1 t}), \ \ (x_2(t), y_2(t)) = (\alpha_2 e^{k_2 t}, \beta_2 e^{k_2 t}) \tag{3.5}$$

ή
$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{k_1 t} \\ \beta_1 e^{k_1 t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 e^{k_2 t} \\ \beta_2 e^{k_2 t} \end{pmatrix}.$$
Αντικαθιστώντας την (3.5) στο (3.1) προσδιορίζουμε (όχι μονοσήμαντα) τις σταθερές $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$.

Οι ρίζες του (3.4) είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$
και (α_1, β_1) είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή k_1, και (α_2, β_2) είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή k_2.

Η γενική λύση του (3.1) είναι
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$
ή
$$(x(t), y(t)) = C_1(x_1, y_1) + C_2(x_2, y_2).$$
Αν έχουμε μη ομογενές σύστημα
$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + f_1(t)$$
(3.6)
$$\frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + f_2(t),$$
πρώτα βρίσκουμε τη γενική λύση του (3.1) και μετά τη μερική λύση του (3.6), το άθροισμα θα μας δώσει τη γενική λύση του (3.6).

Παράδειγμα 3.1. Να βρεθεί το θεμελιώδες σύστημα και η γενική λύση του συστήματος
$$\frac{dx}{dt} = x + 2y + 2$$
$$\frac{dy}{dt} = 4x + 3y + 1.$$
Λύση. Εδώ προφανώς
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4, & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Ψάχνουμε πρώτα τη γενική λύση του συστήματος
$$\frac{dx}{dt} = x + 2y$$
$$\frac{dy}{dt} = 4x + 3y.$$
Γράφουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο
$$k^2 - 4k - 5 = 0,$$
οι ρίζες είναι $k_1 = 5$, $k_2 = -1$. Συνεπώς
$$(x_1, y_1) = (\alpha_1 e^{5t}, \beta_1 e^{5t}), \quad (x_2, y_2) = (\alpha_2 e^{-t}, \beta_2 e^{-t}).$$

Το το διάνυσμα $(1,2)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $\mathbf{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $k_1 = 5$ και το διάνυσμα $(1,-1)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $\mathbf{A}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $k_2 = -1$. Πράγματι (βλ. (3.3))

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

παρομοίως

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Προφανώς το ίδιο αποτέλεσμα θα έχουμε αντικαθιστώντας στο σύστημα την (x_1, y_1) (θα πάρουμε $\beta_1 = 2\alpha_1$ με $\alpha_1 \neq 0$ τυχαίο, έστω 1) και έπειτα αντικαθιστώντας στο σύστημα την (x_2, y_2) (θα πάρουμε $\beta_2 = -\alpha_2$ με $\alpha_2 \neq 0$ τυχαίο, έστω 1).

Άρα το θεμελιώδες σύστημα είναι

$$(x_1, y_1) = (e^{5t}, 2e^{5t}), \ \ (x_2, y_2) = (e^{-t}, -e^{-t})$$

και η γενική λύση του ομογενούς συστήματος

$$(x(t), y(t)) = C_1(e^{5t}, 2e^{5t}) + C_2(e^{-t}, -e^{-t}).$$

Ψάχνουμε τώρα μια μερική λύση $\bar{\phi}(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ του μη ομογενούς συστήματος σε μορφή (βλ. (2.4))

$$\phi_1 = c_1(t)e^{5t} + c_2(t)e^{-t}, \ \ \phi_2 = c_1(t)2e^{5t} - c_2(t)e^{-t}.$$

Αντικαθιστώντας την $\bar{\phi}(t)$ στο αρχικό μας σύστημα για $c_1(t)$, $c_2(t)$ παίρνουμε (βλ. (2.5))

$$c_1'(t)e^{5t} + c_2'(t)e^{-t} = 2,$$
$$c_1'(t)2e^{5t} - c_2'(t)e^{-t} = 1.$$

Συνεπώς $c_1'(t) = e^{-5t}$, $c_2'(t) = e^{t}$ άρα επιλέγουμε

$$c_1(t) = -\frac{1}{5}e^{-5t}, \ \ c_2(t) = e^{t}$$

και

$$\phi_1 = -1/5 + 1 = 4/5, \ \ \phi_2 = -2/5 - 1 = -7/5.$$

Η γενική λύση του συστήματος είναι

$$(x(t), y(t)) = C_1(e^{5t}, 2e^{5t}) + C_2(e^{-t}, -e^{-t}) + (\frac{4}{5}, -\frac{7}{5})$$

δηλαδή

$$x(t) = C_1e^{5t} + C_2e^{-t} + \tfrac{4}{5}$$
$$y(t) = 2C_1e^{5t} - C_2e^{-t} - \tfrac{7}{5}$$

Μπορούμε να την γράψουμε και ως εξής:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 2e^{5t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/5 \\ -7/5 \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα 3.2. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y + 3e^{5t}$$

$$\frac{dy}{dt} = 4x + 3y + 3t.$$

Λύση. Εδώ το δεύτερο μέρος είναι

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 3e^{5t} \\ 3t \end{pmatrix}.$$

Ψάχνουμε μια μερική λύση $\bar{\phi}(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t))$ του μη ομογενούς συστήματος σε μορφή

$$\phi_1 = c_1(t)e^{5t} + c_2(t)e^{-t}, \quad \phi_2 = c_1(t)2e^{5t} - c_2(t)e^{-t}.$$

Αντικαθιστώντας την $\bar{\phi}(t)$ στο σύστημα για $c_1(t)$, $c_2(t)$ παίρνουμε

$$c_1'(t)e^{5t} + c_2'(t)e^{-t} = 3e^{5t},$$
$$c_1'(t)2e^{5t} - c_2'(t)e^{-t} = 3t.$$

Συνεπώς

$$c_1'(t) = 1 + te^{-5t}, \quad c_2'(t) = 2e^{6t} - te^{t}$$

άρα

$$c_1(t) = t - \frac{1}{25}(5te^{-5t} + e^{-5t}), \quad c_2(t) = \frac{1}{3}e^{6t} - te^{t} + e^{t}$$

και

$$\phi_1(t) = te^{5t} + \frac{1}{3}e^{5t} - \frac{6}{5}t + \frac{24}{25},$$
$$\phi_2(t) = 2te^{5t} - \frac{1}{3}e^{5t} + \frac{3}{5}t - \frac{27}{25}.$$

Η γενική λύση του συστήματος είναι

$$(x(t), y(t)) = C_1(e^{5t}, 2e^{5t}) + C_2(e^{-t}, -e^{-t}) + (\phi_1, \phi_2)$$

ή

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{5t} \\ 2e^{5t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}.$$

⋆

β) Έστω τώρα k μιγαδικός αριθμός $k = p + iq$. Η λύση που θα βρούμε είναι η

$$(\alpha_1 e^{(p+iq)t},\ \beta_1 e^{(p+iq)t}). \tag{3.7}$$

Εδώ το ιδιοδιάνυσμα $(\alpha_1,\ \beta_1)$ μπορεί να είναι μιγαδικό. Γνωρίζουμε ότι και το πραγματικό και το φανταστικό μέρος είναι λύσεις και μάλιστα γραμμικώς ανεξάρτητες (γιατί ;), συνεπώς το θεμελιώδες σύστημα είναι

$$(x_1(t), y_1(t)) = (\mathbf{Re}(\alpha_1 e^{(p+iq)t}), \mathbf{Re}(\beta_1 e^{(p+iq)t})),$$
$$(x_2(t), y_2(t)) = (\mathbf{Im}(\alpha_1 e^{(p+iq)t}), \mathbf{Im}(\beta_1 e^{(p+iq)t})).$$

Παράδειγμα 3.3. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\frac{dx}{dt} = x - 5y$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x - y.$$

Λύση. Γράφουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$k^2 + 9 = 0,$$

οι ρίζες είναι $k_1 = 3i$, $k_2 = -3i$. Συνεπώς η λύση είναι

$$(x(t), y(t)) = (\alpha_1 e^{3it}, \beta_1 e^{3it}).$$

Αντικαθιστώντας στο σύστημα την $(x(t), y(t))$ παίρνουμε

$$(1-3i)\alpha_1 - 5\beta_1 = 0$$
$$2\alpha_1 - (1+3i)\beta_1 = 0.$$

Μπορούμε να πάρουμε, π.χ., $\alpha_1 = 5$, $\beta_1 = 1-3i$. Δηλαδή $(5, 1-3i)$ είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $3i$. Άρα

$$(x(t), y(t)) = (5e^{3it}, (1-3i)e^{3it}).$$

Αφού και το πραγματικό και το φανταστικό μέρος θα είναι λύση του συστήματος παίρνουμε ως θεμελιώδες σύστημα το ακόλουθο

$$(x_1, y_1) = (5cos\,3t, cos\,3t + 3sin\,3t), \;\; (x_2, y_2) = (5sin\,3t, -3cos\,3t + sin\,3t)$$

και η γενική λύση του ομογενούς συστήματος θα είναι

$$(x(t), y(t)) = C_1(5cos\,3t, cos\,3t + 3sin\,3t) + C_2(5sin\,3t, -3cos\,3t + sin\,3t)$$

ή

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 5\cos 3t \\ \cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 5\sin 3t \\ -3\cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix}.$$

Μπορούμε τη γενική λύση να την γράψουμε και ως εξής

$$x(t) = C_1 cos\,3t + C_2 sin\,3t,$$
$$y(t) = C_1^* cos\,3t + C_2^* sin\,3t$$

όπου

$$C_1^* = \frac{1}{5}C_1 - \frac{3}{5}C_2, \;\; C_2^* = \frac{3}{5}C_1 + \frac{1}{5}C_2.$$

Αν στη θέση του $k_1 = 3i$ θα πάρουμε $k_2 = -3i$, τότε ψάχνουμε τη λύση σε μορφή

$$(x(t), y(t)) = (\alpha_1 e^{-3it}, \beta_1 e^{-3it}).$$

Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $-3i$ είναι το $(5, 1+3i)$. Καταλήγουμε στο θεμελειώδες σύστημα

$$(5cos\,3t, cos\,3t + 3sin\,3t), \;\; (-5sin\,3t, 3cos\,3t - sin\,3t).$$

Η γενική λύση προφανώς θα είναι η ίδια.

⋆

γ) Τι κάνουμε αν έχουμε διπλή ρίζα k (ιδιοτιμή πολλαπλότητας 2) ; Προφανώς (αφού ο πίνακας είναι 2×2) $k \in \mathbf{R}$. Αν το $v_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή k, τότε η μια λύση είναι

$$(x_1(t), y_1(t)) = (\alpha_1 e^{kt}, \, \beta_1 e^{kt}) \;\; \text{δηλαδή} \;\; x_1 = \alpha_1 e^{kt}, \;\; y_1 = \beta_1 e^{kt}.$$

Ο σκοπός μας είναι να βρούμε άλλη μια λύση η οποία θα είναι γραμμικώς ανεξάρτητη από αυτήν που βρήκαμε. Αυτή τη λύση βρίσκουμε μέσα από το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα

$$v_\gamma = (\alpha_\gamma, \beta_\gamma)$$

το οποίο το προσδιορίζουμε άπο την σχέση [1]

$$(\mathbf{A} - k\mathbf{I})v_1 = v_\gamma$$

και η αντίστοιχη λύση είναι:

$$x_2(t) = (\alpha_1 t + \alpha_\gamma)e^{kt}, \;\; y_2(t) = (\beta_1 t + \beta_\gamma)e^{kt}$$

[1] $(\mathbf{A} - k\mathbf{I})^2 v_2 = (\mathbf{A} - k\mathbf{I})v_1 = 0$

ή
$$(x_2(t), y_2(t)) = (\alpha_1 t + \alpha_\gamma)e^{kt},\ (\beta_1 t + \beta_\gamma)e^{kt}).$$
Πράγματι, αντικαθιστώντας στο σύστημα (3.1) την (x_2, y_2) και διαιρώντας δια e^{kt} πρέπει $\forall t$ να έχουμε
$$k\alpha_1 t + k\alpha_\gamma + \alpha_1 = a_{11}\alpha_1 t + a_{11}\alpha_\gamma + a_{12}\beta_1 t + a_{12}\beta_\gamma,$$
$$k\beta_1 t + k\beta_\gamma + \beta_1 = a_{21}\alpha_1 t + a_{21}\alpha_\gamma + a_{22}\beta_1 t + a_{22}\beta_\gamma,$$
δηλαδή
$$(a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\beta_1 = 0,$$
$$a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\beta_1 = 0,$$
και
$$(a_{11} - k)\alpha_\gamma + a_{12}\beta_\gamma = \alpha_1,$$
$$a_{21}\alpha_\gamma + (a_{22} - k)\beta_\gamma = \beta_1,$$
τα οποία προφανώς ισχύουν. Άρα η $(x_2(t), y_2(t))$ είναι η ζητούμενη λύση. Η γενική λήση του (3.1) σε αυτή την περίπτωση είναι
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} e^{kt} + C_2 \begin{pmatrix} \alpha_1 t + \alpha_\gamma \\ \beta_1 t + \beta_\gamma \end{pmatrix} e^{kt}.$$

Παράδειγμα 3.4. Να βρεθεί το θεμελιώδες σύστημα και η γενική λύση του συστήματος
$$\frac{dx}{dt} = x - y$$
$$\frac{dy}{dt} = x + 3y.$$

Λύση. Γράφουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο
$$k^2 - 4k + 4 = 0.$$
Έχουμε διπλή ρίζα $k_{1,2} = 2$. Συνεπώς ψάχνουμε τη μια λύση σε μορφή
$$(x_1, y_1) = (\alpha_1 e^{2t}, \beta_1 e^{2t}),$$
και αντικαθιστώντας στο σύστημα παίρνουμε
$$\alpha_1 = -\beta_1$$
π.χ. $(1, -1)$ είναι το ζητούμενο ιδιοδιάνυσμα και παίρνουμε
$$(x_1, y_1) = (e^{2t}, -e^{2t}).$$

Ψάχνουμε τη δεύτερη (γραμμικά ανεξάρτητη) λύση σε μορφή
$$(x_2, y_2) = \big((\alpha_1 t + \alpha_\gamma)e^{2t}, (\beta_1 t + \beta_\gamma)e^{2t}\big) = \big((t + \alpha_\gamma)e^{2t}, (-t + \beta_\gamma)e^{2t}\big)$$
και αντικαθιστώντας στο σύστημα παίρνουμε
$$\alpha_\gamma = -1 - \beta_\gamma$$
Αρα μπορούμε να πάρουμε ως θεμελιώδες σύστημα (με $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = -1$) το ακόλουθο:
$$(e^{2t}, -e^{2t}),\quad (te^{2t}, (-1 - t)e^{2t})$$
και η γενική λύση θα είναι
$$(x(t), y(t)) = C_1(e^{2t}, -e^{2t}) + C_2(te^{2t}, (-1 - t)e^{2t}).$$

Παράδειγμα 3.5. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$ με αρχικές συνθήκες $x(0) = 1$, $y(0) = -1$ για το σύστημα από το Παράδειγμα 3.4.

Λύση. Η γενική λύση είναι

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t}$$
$$y(t) = -C_1 e^{2t} - C_2(1+t)e^{2t}.$$

Για να προσδιορίσουμε τις αυθαίρετες σταθερές έχουμε

$$x(0) = C_1 = 1,$$
$$y(0) = -C_1 - C_2 = -1.$$

δηλαδή $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, άρα η ζητούμενη λύση είναι

$$(x(t), y(t)) = (e^{2t}, -e^{2t}).$$

Παράδειγμα 3.6. Να βρεθεί η λύση του προβλήματος $Cauchy$ με αρχικές συνθήκες $x(0) = 197/25$, $y(0) = 94/25$ για το σύστημα από το Παράδειγμα 3.2.

Λύση. Η γενική λύση είναι

$$x(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t} + te^{5t} + \frac{1}{3}e^{5t} - \frac{6}{5}t + \frac{24}{25},$$
$$y(t) = C_1 2e^{5t} - C_2 e^{-t} + 2te^{5t} - \frac{1}{3}e^{5t} + \frac{3}{5}t - \frac{27}{25}.$$

Για να προσδιορίσουμε τις αυθαίρετες σταθερές έχουμε

$$x(0) = C_1 + C_2 + \frac{1}{3} + \frac{24}{25} = \frac{197}{25},$$
$$y(0) = 2C_1 - C_2 - \frac{1}{3} - \frac{27}{25} = \frac{94}{25}.$$

δηλαδή $C_1 = 4$, $C_2 = 0$, άρα η ζητούμενη λύση είναι

$$x(t) = 4e^{5t} + te^{5t} + \frac{1}{3}e^{5t} - \frac{6}{5}t + \frac{24}{25},$$
$$y(t) = 8e^{5t} + 2te^{5t} - \frac{1}{3}e^{5t} + \frac{3}{5}t - \frac{27}{25}.$$

⋆

Παρατηρούμε ότι αν ο πίνακας είναι συμμετρικός και έχει διπλή ιδιοτιμή, τότε σε αυτή τη ιδιοτιμή αντιστοιχούν δυο ανεξάρτητα ιδιοδιαύσματα, αυτό όμως (όπως ήδη το είχαμε τονίσει) λαμβάνει χώρα μόνο αν $a_{12} = a_{21} = 0$ και $a_{11} = a_{22}$, δηλαδή το σύστημα διασπάται σε δυο ανεξάρτητες εξισώσει:

$$\frac{dx}{dt} = a\,x \;\text{ και }\; \frac{dy}{dt} = a\,y,$$

όπου $a = a_{11} = a_{22}$. Προφανώς η γενική λύση θα είναι $x(t) = C_1 e^{at}$, $y(t) = C_2 e^{at}$ την οποία μπορούμε να την γράψουμε και ως

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{at} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{at}.$$

Για $n > 2$ η μέθοδος παραμένει η ίδια απλώς οι υπολογισμοί γίνονται πιο ογκώδεις. Ας πάρουμε $n = 3$:

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z,$$
$$\frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z,$$

$$\frac{dz}{dt} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z.$$

Πρέπει να βρούμε τρεις γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος. Ψάχνουμε τις λύσεις σε μορφή

$$x(t) = \alpha e^{kt}, \ \ y(t) = \beta e^{kt}, \ \ z(t) = \gamma e^{kt}$$

όπου α, β, γ κάποιες σταθερές. Αντικαθιστώντας αυτές τις συναρτήσεις στο σύστημα (3.1) παίρνουμε

$$\begin{aligned} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0 \end{aligned}$$

Για να υπάρχει μη τετριμμένη λύση α, β, γ του αλγεβρικού συστήματος πρέπει συστήματος να ισούται με μηδέν

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0.$$

Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές και ακολούθούμε τη διαδικασία ουσιαστικά ίδια μα αυτήν για $n = 2$. Δηλαδή βρίσκουμε τρεις γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις και ο γραμμικώς στνδιασμός είναι γενική λύση του συστήματος. Αν το σύστημα είναι μη ομογενές τότε πρέπει να βρούμε μερική λύση του μη ομογενούς εφαρμόζωντας την μέθοδο των μεταβαλλόμενων σταθερών

Παράδειγμα 3.7. Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + 1, \\ \frac{dy}{dt} &= 2x + y - 2z + e^t \sin 2t - \frac{3}{2}, \\ \frac{dz}{dt} &= 3x + 2y + z + 1, \end{aligned}$$

και έπειτα η λύση του προβλήματος $Cauchy$:

$$(x(0), y(0), z(0)) = (0, 0, 0).$$

Λύση. Το πρόβλημα μπορούμε να το γράψουμε και σε μορφή

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \sin 2t - \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Πρώτα λύνουμε το ομογενές συστημα. Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα συντελεστών $\mathbf{A}$:

$$\begin{vmatrix} 1 - k & 0 & 0 \\ 2 & 1 - k & -2 \\ 3 & 2 & 1 - k \end{vmatrix} = 0 \ \ \Rightarrow \ \ k_1 = 1, \ \ k_{2,3} = 1 \pm 2i.$$

Ψάχνουμε τριες λύσεις σε μορφή

$$x = \alpha_1 e^t, \ \ y = \beta_1 e^t, \ \ z = \gamma_1 e^t,$$

και

$$x = \alpha_2 e^{(1 \pm 2i)t}, \ \ y = \beta_2 e^{(1 \pm 2i)t}, \ \ z = \gamma_2 e^{(1 \pm 2i)t}.$$

Έχουμε για $k_1 = 1$

$$0\alpha_1 + 0\beta_1 + 0\gamma_1 = 0$$

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + 0\beta_1 - 2\gamma_1 = 0 \\ 3\alpha_1 + 2\beta_1 + 0\gamma_1 = 0 \end{aligned}$$

άρα επιλέγουμε $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = (1, -3/2, 1)$. Η μια λύση είναι η

$$(e^t, -\frac{3}{2}e^t, e^t).$$

Για να βρούμε δυο άλλες γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις ακολούθούμε την ίδια διαδικασία: παίρνουμε $k = 1 - 2i$ (μπορούμε να πάρουμε και $k = 1 + 2i$) και έχουμε

$$\begin{aligned} 2i\alpha_2 + 0\beta_2 + 0\gamma_2 = 0, \\ 2\alpha_2 + 2\beta_2 - 2\gamma_2 = 0, \\ 3\alpha_2 + 2\beta_2 + 2i\gamma_2 = 0. \end{aligned}$$

Επιλέγουμε $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = (0, 1, i)$ και η αντίστοιχη λύση είναι

$$(0, e^{(1-2i)t}, ie^{(1-2i)t}) = (0, e^t cos2t, e^t sin2t) + i(0, -e^t cos2t, e^t cos2t).$$

Αφού και το πραγματικό και το φανταστικό μέρος είνει λύσεις, έχουμε οτι το θ. σ. λύσεων αποτελείται από τις

$$(e^t, -\frac{3}{2}e^t, e^t), \quad (0, e^t cos2t, e^t sin2t), \quad (0, -e^t \sin 2t, e^t cos2t).$$

Άρα η γενική λύση του ομογενούς συστήματος είναι

$$(x(t), y(t), z(t)) =$$

$$(C_1 e^t, -C_1 3/2 e^t + C_2 e^t \cos 2t - C_3 e^t \sin 2t, C_1 e^t + C_2 e^t \sin 2t + C_3 e^t \cos 2t)$$

ή

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^t \\ -\frac{3}{2}e^t \\ e^t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \cos 2t \\ e^t \sin 2t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -e^t \sin 2t \\ e^t \cos 2t \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Βρίσκουμε την μερική λύση του μη ομογενούς με την μέθοδο των μεταβαλλόμενων σταθερών. Έχουμε (βλ. (2.5))

$$(c_1', c_2', c_3') \begin{pmatrix} e^t & -\frac{3}{2}e^t & e^t \\ 0 & e^t \cos 2t & e^t \sin 2t \\ 0 & -e^t \sin 2t & e^t \cos 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \sin 2t - \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

συνεπώς

$$c_1' = e^{-t},$$

$$c_2' \cos 2t - c_3' \sin 2t = \sin 2t,$$

$$c_2' \sin 2t + c_3' \cos 2t = 0,$$

άρα

$$c_2' = \sin 2t \cos 2t, \quad c_3' = -\sin^2 2t$$

και

$$c_1 = -e^{-t}, \quad c_2 = \frac{1}{4}\sin^2 2t, \quad c_3 = \frac{1}{4}\sin 2t \cos 2t - \frac{t}{2}.$$

Άρα η μερική λύση είναι

$$-e^{-t} \begin{pmatrix} e^t \\ -\frac{3}{2}e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \frac{\sin^2 2t}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \cos 2t \\ e^t \sin 2t \end{pmatrix} + \frac{\sin 2t \cos 2t - 2t}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ -e^t \sin 2t \\ e^t \cos 2t \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} + \frac{t}{2} e^t \sin 2t \\ -1 + \frac{1}{4} e^t \sin 2t - \frac{t}{2} e^t \cos 2t \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Η η γενική λύση είναι το άθροισμα των (3.8) και (3.9), θα την γράψουμε ως εξής:

$$x(t) = C_1 e^t - 1,$$
$$y(t) = e^t\big(-\frac{3}{2}C_1 + C_2 \cos 2t - C_3 \sin 2t + \frac{t}{2}\sin 2t\big) + \frac{3}{2},$$
$$z(t) = e^t\big(C_1 + C_2 \sin 2t + C_3 \cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{t}{2}\cos 2t\big) - 1.$$

Για να λύσουμε το πρόβλημα $Cauchy$ επαληθεύουμε τις αρχικές συνθήκες:

$$x(0) = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = 1,\;\; y(0) = 0 \;\Rightarrow\; C_2 = 0 \;\text{ και }\; z(0) = 0 \;\Rightarrow\; C_3 = 0,$$

άρα η λύση του προβλήματος $Cauchy$ είναι

$$x(t) = e^t - 1,$$
$$y(t) = e^t\big(\frac{t}{2}\sin 2t - \frac{3}{2}\big) + \frac{3}{2},$$
$$z(t) = e^t\big(1 + \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{t}{2}\cos 2t\big) - 1.$$

⋆

Αν έχουμε ρίζα k πολλαπλότητας 3 (οι οποία αναγκαστικά είναι πραγματική). Εκτός από την λύση

$$(x_1(t), y_1(t), z_1(t)) = \mathbf{v}e^{kt},$$

όπου $\mathbf{v}$ είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, πρέπει να βρούμε άλλες δυο τ.ω. οι τρείς λύσεις να είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Βρίσκουμε το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα 1ης τάξης $\mathbf{v}_1$ από την σχέση

$$(\mathbf{A} - k\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$$

και το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα 2ης τάξης $\mathbf{v}_2$ από την σχέση

$$(\mathbf{A} - k\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v_1}.$$

Οι δυο ζητούμενες λύσεις θα είναι

$$(x_2(t), y_2(t), z_2(t)) = (\mathbf{v}t + \mathbf{v}_1)e^{kt},$$

και

$$(x_3(t), y_3(t), z_3(t)) = (\mathbf{v}t^2/2 + \mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2)e^{kt}.$$

Το ότι οι (x_2, y_2, z_2) και (x_3, y_3, z_3) είναι όντως λύσεις είναι εύκολο να το διαπιστώσουμε όπως και στην περίπτωση των δύο εξισώσεων. Σε αντίθεση με την διδιάστατη περίπτωση εδώ αν ο πίνακας είναι συμμετρικός και έχει διπλή ή τριπλή ιδιοτιμή το σύστημα εν γένη δε διασπάται σε ανεξάρτητες εξισώσεις (βλ. Άσκηση 3.7).